

令和6年度学力検査問題

工学部・後期日程

数 学

⑤ $\left(\begin{array}{l} \text{数 学 I} \\ \text{数 学 II} \\ \text{数 学 III} \\ \text{数 学 A} \\ \text{数 学 B} \end{array} \right)$

		ページ	ページ
問	題	1	～ 2
解答用紙枚数		2	枚
解 答 時 間		120	分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 本冊子のページ数は上記のとおりである。落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがある場合は申し出ること。
3. 解答用紙 2 枚の指定された欄 2 箇所（計 4 箇所）に、忘れずに本学の受験番号を記入すること。
4. 解答は、すべて別紙解答用紙のそれぞれの解答欄に記入すること。
5. 配付された問題冊子は、試験終了後持ち帰ること。
6. この問題冊子の空白部は、草稿用紙として使用してよい。

1

以下の問いに答えよ。

- (1) n を 0 以上の整数とする。 $x + y + z = n$ を満たすような 0 以上の整数 x, y, z の組の個数を n の式で表せ。
- (2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、関数 $5 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta$ の最大値と最小値を求めよ。
- (3) 方程式 $\left(\log_2 \frac{2}{x}\right)(\log_2 2x) = (\sqrt{2} + \log_2 x)^2$ を解け。
- (4) 辺 AB を斜辺とする直角三角形 OAB と、2 点 O, A を通る直線 l を考える。 P を $AP : PB = s : (1 - s)$ (ただし、 $0 < s < 1$) となる線分 AB 上の点とし、 Q を $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{PQ}$ となる l 上の点とする。このとき、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおいて、 $|\overrightarrow{OQ}|$ を $s, |\vec{a}|, |\vec{b}|$ で表せ。
- (5) $z^2 = \frac{1}{i} \left(\cos \frac{5}{6} \pi - i \sin \frac{5}{6} \pi \right)$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。

2

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は次を満たすとする。

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ (1 + \sqrt{2})^{n-1} - (1 - \sqrt{2})^{n-1} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また、各自然数 n に対して、次の命題を考える。

$P(n)$: n 以下のすべての自然数 j に対して、 $a_j = b_j$ が成り立つ。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n = 1, 2$ のとき、 $P(n)$ が真であることを示せ。
- (2) 数学的帰納法によって、すべての自然数 n に対して、 $P(n)$ が真であることを示せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

3

以下の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+\sin x}$ であることを示せ。

- (2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$ を求めよ。

- (3) 次の等式と不等式を示せ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4(\sin^3 x)(\cos x) \log(1+x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^4 x}{1+x} \, dx \leq \frac{3}{4}\pi - \frac{5}{3}$$