令和５年度学力検査問題

工学部・後期日程

数　　学

⑤ 数学Ⅰ　数学Ⅱ　数学Ⅲ　数学Ａ　数学Ｂ

問　　題	ページ 1 〜 ページ 2	
解答用紙枚数	2　枚	
解答時間	120 分	

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 本冊子のページ数は上記のとおりである。落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがある場合は申し出ること。
3. 解答用紙 2 枚の指定された**欄２箇所（計４箇所）**に，忘れずに本学の**受験番号**を記入すること。
4. 解答は，すべて**別紙解答用紙のそれぞれの解答欄**に記入すること。
5. 配布された問題冊子は，試験終了後持ち帰ること。
6. この問題冊子の空白部は，草稿用紙として使用してよい。

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $2^{n-1} \leqq n!$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を数学的帰納法で証明せよ。さらに，自然数 N を与えたとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} < 2$ を示せ。

(2) $\log_{10} 2 = 0.30$，$\log_{10} 41 = 1.61$ とするとき，$\log_{10} 80$，$\log_{10} 82$ の値を求めよ。さらに，$10^{0.95} < 9 < 10^{0.96}$ を示せ。

(3) 平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に異なる 3 点 A，B，C をとる。$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$ が成り立つとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を求めよ。さらに，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$ も成り立つとき，△ABC の三辺の長さの和を求めよ。

(4) 50 円硬貨 4 枚と，100 円硬貨 5 枚を同時に投げたとき，表が出た硬貨の合計金額が 500 円未満となる確率を求めよ。

(5) 複素数 z は実部も虚部も負であり，$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$ を満たすものとする。偏角を 0 以上 2π 未満として，z^2，z を極形式で表せ。

2 連立不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+y<\dfrac{\pi}{2}$, $\tan(x+y) \leqq \sqrt{3}$ を満たす平面上の点 (x, y) 全体の領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) 領域 D を平面上に図示せよ。

(2) 点 (x, y) が領域 D を動くとき, $t=3x+2y$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) 点 (x, y) が領域 D を動くとき, $2\sqrt{3}\cos^2\left(\dfrac{3}{2}x+y\right)+\sin(3x+2y)$ の最大値と最小値を求めよ。

3 以下の問いに答えよ。

(1) α を $\tan\alpha=3$ を満たすような $\dfrac{\pi}{2}$ より小さい正の数とする。定積分 $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ を α の式で表せ。

(2) n を 2 以上の自然数とする。定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx$ を n の式で表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^2 \left(\frac{2}{1+x^2}\right)^n dx$ を求めよ。