

# 令和5年度学力検査問題

工学部・前期日程

## 数 学

③  $\left( \begin{array}{l} \text{数学 I} \\ \text{数学 II} \\ \text{数学 III} \\ \text{数学 A} \\ \text{数学 B} \end{array} \right)$

	ページ	ページ
問 題	1	～ 2
解答用紙枚数	2	枚
解 答 時 間	120	分

### 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 本冊子のページ数は上記のとおりである。落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがある場合は申し出ること。
3. 解答用紙2枚の指定された欄2箇所（計4箇所）に、忘れずに本学の受験番号を記入すること。
4. 解答は、すべて別紙解答用紙のそれぞれの解答欄に記入すること。
5. 配布された問題冊子は、試験終了後持ち帰ること。
6. この問題冊子の空白部は、草稿用紙として使用してよい。

1

以下の問いに答えよ。

- (1)  $\log_{10} 2 = p$ ,  $\log_{10} 3 = q$  として,  $\log_2 5$  と  $\log_2(5!)$  を  $p$ ,  $q$  で表せ。
- (2) 平面上の定点  $O$ ,  $A$ ,  $B$  に対し,  $|\vec{OA}| = 2$ ,  $|\vec{OB}| = 3$ ,  $|\vec{OA} + \vec{OB}| = 4$  とする。点  $P$  が  $(\vec{OP} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OP} - \vec{OB}) = 0$  を満たしながら動くとき,  $P$  の描く曲線の長さを求めよ。
- (3) 大袋の中に青球 1 個, 白球 1 個が入っており, 小袋の中に赤球 1 個, 青球 1 個, 白球 1 個が入っている。いま, 小袋から色を見ずに球を 2 個取り出して大袋に入れた。この後, 大袋から球を 1 個取り出したとき, それが赤球である確率を求めよ。
- (4)  $\cos \theta = \alpha$  として,  $\cos 3\theta$  を  $\alpha$  で表せ。また,  $\theta = \frac{\pi}{9}$  のとき, 三角関数の積  $\cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta$  の値を求めよ。
- (5)  $a$  を正の実数として, 複素数  $1 + ai$  の偏角を  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) とする。このとき, 複素数  $a + i$  の偏角を  $\theta$  で表せ。さらに,  $(1 + ai)^6 + (a + i)^6$  の実部を求めよ。

2 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_j\}$  が次のように与えられているとする。ただし、 $r$  は正の定数とする。

$$a_1 = r^2 - 12r, \quad a_{n+1} = ra_n + (r-1)r^{2n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_1 = -29, \quad b_{j+1} - b_j = \frac{6}{1-4j^2} \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a_2$ ,  $a_3$  を求めよ。さらに、 $n$  と  $r$  を用いて一般項  $a_n$  を表す式を予想し、その予想が正しいことを数学的帰納法で証明せよ。
- (2) 一般項  $b_j$  を  $j$  を用いて表せ。
- (3)  $n$  を与えたとき、 $a_n < b_j$  となる  $j$  が無限に多く存在するような  $r$  の範囲を  $n$  を用いて表せ。

3 関数  $f(x) = \frac{e^2}{\sqrt{x}} \log x$  ( $x > 0$ ) について、以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  の増減と極値、およびグラフの変曲点を調べよ。
- (2) 連立不等式  $0 \leq y \leq \frac{e^2}{\sqrt{x}} \log x$ ,  $0 < x \leq e^2$  で定まる領域の面積  $S$  を求めよ。
- (3) (2) で定めた領域を  $x$  軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積  $V$  を求めよ。