令和５年度学力検査問題

医学部医学科・前期日程

数　　　学

② 数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B

問　　　題	1 ページ ～ 2 ページ
解答用紙枚数	2　枚
解 答 時 間	120 分

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 本冊子のページ数は上記のとおりである。落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがある場合は申し出ること。
3. 解答用紙２枚の指定された**欄２箇所（計４箇所）**に，忘れずに本学の**受験番号**を記入すること。
4. 解答は，すべて**別紙解答用紙のそれぞれの解答欄**に記入すること。
5. 配布された問題冊子は，試験終了後持ち帰ること。
6. この問題冊子の空白部は，草稿用紙として使用してよい。

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $\log_{10} 2 = p$，$\log_{10} 3 = q$ として，$\log_2 5$ と $\log_2 (5!)$ を p，q で表せ。

(2) 平面上の定点 O，A，B に対し，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 3$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 4$ とする。点 P が $(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 0$ を満たしながら動くとき，P の描く曲線の長さを求めよ。

(3) 大袋に赤球 5 個と白球 1 個が，小袋に赤球 2 個と白球 2 個が入っている。各袋から 1 個ずつ球を取り出して，色を確かめずに，それぞれ出した袋と逆の袋に入れる。その後でさらに，各袋から 1 個ずつ球を取り出すとき，最後に出した 2 個の球が同じ色である確率を求めよ。

(4) $\cos\theta = \alpha$ として，$\cos 3\theta$ を α で表せ。また，$\theta = \dfrac{\pi}{9}$ のとき，三角関数の積 $\cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta$ の値を求めよ。

(5) a を正の実数として，複素数 $1 + ai$ の偏角を $\theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき，複素数 $a + i$ の偏角を θ で表せ。さらに，$(1 + ai)^6 + (a + i)^6$ の実部を求めよ。

2　数列 $\{a_n\}$，$\{b_j\}$ が次のように与えられているとする。ただし，r は正の定数とする。

$$a_1 = r^2 - 12r, \quad a_{n+1} = r a_n + (r-1)r^{2n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_1 = -29, \quad b_{j+1} - b_j = \frac{6}{1-4j^2} \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3 を求めよ。さらに，n と r を用いて一般項 a_n を表す式を予想し，その予想が正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

(2) 一般項 b_j を j を用いて表せ。

(3) n を与えたとき，$a_n < b_j < a_{n+1}$ となる j が無限に多く存在するような r の範囲を n を用いて表せ。

3　以下の問いに答えよ。必要ならば，正の数 a に対し，$a > \log(a+1)$ であることを用いてよい。

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n\log n}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n\{\log n - \log(n+1)\}}{\log n}$ を求めよ。

(2) 関数 $y = x\log(x+1) - (x+1)\log x \ (x > 1)$ について，常に $y' < 0$ であることを示せ。さらに y'' の符号と $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y$ を調べて，この関数のグラフをかけ。

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x\log(x+1)\,dx$，$\displaystyle\int (x+1)\log x\,dx$ を求めよ。

(4) n を 4 以上の自然数とし，曲線 $y = x\log(x+1) - (x+1)\log x$ と x 軸，および 2 直線 $x = 3$，$x = n$ で囲まれた図形の面積を S_n とする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log n}$ を求めよ。