令和 4 年度学力検査問題

医学部医学科・前期日程

数　学

② （数学Ⅰ　数学Ⅱ　数学Ⅲ　数学A　数学B）

問　　　題	1 ページ ～ 2 ページ
解答用紙枚数	2 枚
解 答 時 間	１２０分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 本冊子のページ数は上記のとおりである。 落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがある場合は申し出ること。
3. 解答用紙２枚の指定された欄**２箇所（計４箇所）**に，忘れずに本学の**受験番号**を記入すること。
4. 解答は，すべて**別紙解答用紙のそれぞれの解答欄**に記入すること。
5. 配布された問題冊子は，試験終了後持ち帰ること。
6. この問題冊子の空白部は，草稿用紙として使用してよい。

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3{a_n}^5 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。この数列の一般項を求めよ。

(2) $a,\ b$ を正の実数とする。$a \leqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3-\log_{\frac{1}{2}} x+\log_2 b}$ が成り立つ x の範囲を求めよ。

(3) $\cos(x+y) - \cos x + \cos(x-y) = 0$ $\left(0 < x < \pi,\ 0 < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす $(x,\ y)$ 全体を xy 平面上に図示せよ。

(4) α を正の実数，β を複素数とする。複素数平面上の３点 $0,\ \alpha,\ \beta$ を頂点とする三角形の面積が 1 で，α と β が $5\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2 = 0$ を満たすとき，α と β の値を求めよ。

(5) 袋Ａには赤球 3 個と白球 2 個，袋Ｂには赤球 5 個と白球 3 個が入っている。袋Ａから球を 1 個取り出して，色を確認せずに袋Ｂに入れ，中身をよくかき混ぜた後，袋Ｂから球を 1 個取り出す。袋Ｂから取り出した球が白球であるとき，袋Ａから取り出した球も白球であった確率を求めよ。

2

実数 s に対して平面ベクトル $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{b_2}$ を，成分を用いて

$$\overrightarrow{a_1}=(x_1,\ y_1)+s(2,\ 1),\quad \overrightarrow{b_1}=(-3,\ -1)+s(-2,\ -1),$$
$$\overrightarrow{a_2}=(x_2,\ y_2)+s(0,\ 1),\quad \overrightarrow{b_2}=(1,\ -3)+s(1,\ -2)$$

と定める。ただし x_1, y_1, x_2, y_2 は s によらない定数で，内積について

$$\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{b_2}=10+7s,\quad \overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{b_1}=-12-7s-s^2$$

がすべての s に対して成り立っているとする。実数 t に対して

$$\overrightarrow{c_1}=\overrightarrow{a_1}+t\overrightarrow{b_1},\quad \overrightarrow{c_2}=\overrightarrow{a_2}+t\overrightarrow{b_2}$$

とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) x_1, y_1, x_2, y_2 を求めよ。

(2) $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}$ を s を用いて表せ。また $\overrightarrow{b_1}\cdot\overrightarrow{b_2}$ を求めよ。さらに $\overrightarrow{c_1}$ と $\overrightarrow{c_2}$ が垂直になるとき，t を s で表せ。

(3) s を正の実数とする。$\overrightarrow{c_1}$ と $\overrightarrow{c_2}$ のすべての成分が整数であり，$\overrightarrow{c_1}$ と $\overrightarrow{c_2}$ が垂直になるとき，s の値をすべて求めよ。

3

以下の問いに答えよ。

(1) 2 以上の自然数 n に対し $\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}e^{-\frac{n-1}{n}x^n-\frac{1}{n}}\,dx$ を求めよ。

(2) $x>0$ とする。$\log x \leqq \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}$ を示せ。さらにこの不等式を用いて

$$(n-3)\log x-\frac{n-1}{n}x^n+x^2-\frac{1}{n}\leqq 0\quad (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$$

を示せ。

(3) $x>0$ のとき $x^{n-1}e^{-\frac{n-1}{n}x^n-\frac{1}{n}}\leqq x^2e^{-x^2}$ $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ を示せ。さらにこの不等式を用いて $e^{-\frac{1}{3}}\leqq\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ を示せ。