教育学部 $\boxed{4-2}$，**生物資源学部** $\boxed{4-2}$　　（指摘後に正解とした解答例）

(1) $g(x) = e^x \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt + \int_0^x e^t f'(t)\,dt$ であるから，

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x \int_0^x f'(t)\,dt + e^x f'(x) + e^x f'(x) \\ &= e^x (f(x) - f(0)) + 2e^x f'(x) \\ &= \underline{e^x f(x) + 2e^x f'(x) - e^x}. \end{aligned}$$

(2) $g(0) = \displaystyle\int_0^0 (e^x + e^t) f'(t) dt = 0$ である．(2) の問題の条件式に $x = 0$ を代入する．$f(0) = 1$ より $1 = e^0 f(0) = -3 \times 0^2 e^0 + g(0) = 0$ でありこれは矛盾である．よって<u>条件を満たす $f(x)$ は存在しない</u>.

(2′)

$$e^x f(x) = -3x^2 e^x + g(x) \tag{a}$$

の両辺を微分して

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = -(3x^2 + 6x)e^x + e^x f(x) + 2e^x f'(x) - e^x$$

を得る．これより $e^x f'(x) = (3x^2 + 6x + 1)e^x$ であるから，

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$$

となる．よって

$$f(x) = \int (3x^2 + 6x + 1)\,dx = x^3 + 3x^2 + x + C$$

である

- (ここまでで正解とする) -

（が，条件 $f(0) = 1$ より $C = 1$ である．よって

$$\underline{f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1}$$

しかし、このとき (a) より $g(x) = e^x(x^3 + 6x^2 + x + 1)$ となり，特に $g(0) = 1$ となる．これは問題の $g(x) = \displaystyle\int_0^x (e^x + e^t) f'(t) dt$ に $x = 0$ を代入して得られる $g(0) = 0$ に矛盾する．よって<u>条件を満たす $f(x)$ は存在しない</u>.）